

# Nachklausurprüfung zur Analysis I, II für Wirtschaftsinformatiker, WS 2005/06

8. April 2006

## AUFGABE 1

Beweisen Sie mit vollständiger Induktion, dass für jedes  $n, m \in \mathbb{N}$  gilt:  $\frac{n^{m+1}}{m+1} < \sum_{k=1}^n k^m$ .

*Hinweis:*  $\binom{m+1}{l} = \frac{m+1}{m+1-l} \binom{m}{l}$ . 8 Punkte.

**Lösung:**  $n = 1$ : linke Seite =  $\frac{1}{m+1}$ , rechte Seite = 1  $\Rightarrow$  linke Seite < rechte Seite für alle  $m \in \mathbb{N}$ .

Induktionsannahme:  $\frac{n^{m+1}}{m+1} < \sum_{k=1}^n k^m$ .

Schluss von  $n$  auf  $n+1$ :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k^m &= \sum_{k=1}^n k^m + (n+1)^m > (\text{Induktionsannahme}) \frac{n^{m+1}}{m+1} + (n+1)^m \\ &= \frac{n^{m+1}}{m+1} + \sum_{l=0}^m \binom{m}{l} n^l = (\text{Hinweis}) \frac{n^{m+1}}{m+1} + \sum_{l=0}^m \frac{m+1-l}{m+1} \binom{m+1}{l} n^l \\ &\geq \frac{n^{m+1}}{m+1} + \sum_{l=0}^m \frac{1}{m+1} \binom{m+1}{l} n^l = \frac{1}{m+1} \sum_{l=0}^{m+1} \binom{m+1}{l} n^l = \frac{(n+1)^{m+1}}{m+1} \end{aligned}$$

## AUFGABE 2

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} x(\sqrt{x^2+1} - x)$ . 5 Punkte.

**Lösung:**  $x(\sqrt{x^2+1} - x) = x \frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} = \frac{x}{x(\sqrt{1+1/x^2}+1)} = \frac{1}{\sqrt{1+1/x^2}+1}$   
 $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} x(\sqrt{x^2+1} - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1+1/x^2}+1} = \frac{1}{2}$ .

b)  $\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}}$ . 5 Punkte.

**Lösung:**  $x^{\frac{1}{1-x}} = e^{\frac{\ln(x)}{1-x}}$ .

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{1-x} = (\text{de l'Hospital'sche Regel}) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1/x}{-1} = -1$ .

Da  $e^x$  stetig ist, folgt:  $\lim_{x \rightarrow 1} e^{\frac{\ln(x)}{1-x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{1-x}} = e^{-1}$ .

## AUFGABE 3

Man untersuche die folgenden Reihen auf Konvergenz:

a)  $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$ . 5 Punkte.

**Lösung:**  $\sqrt{n} - \sqrt{n-1} = \frac{n-(n-1)}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}} \geq \frac{1}{n+n} = \frac{1}{2n} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) \geq \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} 1/n \Rightarrow$  Die Reihe hat eine divergente Minorante, ist also selbst divergent!

b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n^2+1}\right)^2$ . 5 Punkte.

**Lösung:**  $\frac{n+1}{n^2+1} = \frac{n(1+1/n)}{n^2(1+1/n^2)} \leq \frac{n \times 2}{n^2 \times 1} = \frac{2}{n} \Rightarrow 0 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n^2+1}\right)^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}$

Integralkriterium:  $f(x) := \frac{4}{x^2}$  ist monoton fallend für  $x \geq 1$ , folglich  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{4}{n^2} \leq \int_1^{\infty} \frac{4}{x^2} = -4/x \Big|_1^{\infty} = 4$ . Folglich gilt  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} \leq 8$ , also ist die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n^2+1}\right)^2$  konvergent, da sie eine konvergente Majorante besitzt.

#### AUFGABE 4

Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f(x, y) := \begin{cases} (1 + x^2 y^2)^{-\frac{1}{x^2 + y^2}} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & \text{für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

an der Stelle  $(0, 0)$  stetig ist.

*Hinweis:* Es gilt  $\ln(1+x) \leq x$  für  $x > -1$  !

8 Punkte.

**Lösung:**  $(1 + x^2 y^2)^{-\frac{1}{x^2 + y^2}} = e^{-\frac{\ln(1+x^2 y^2)}{x^2 + y^2}}$  Die  $e$ -Funktion ist stetig, also genügt es, den Grenzwert von  $h(x, y) := \frac{\ln(1+x^2 y^2)}{x^2 + y^2}$  für  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$  zu berechnen.  $0 \leq h(x, y) \leq$   
*(Hinweis)*  $\frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} \leq \frac{(x^2 + y^2) y^2}{x^2 + y^2} = y^2. \implies \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} h(x, y) = 0 \implies \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} e^{-h(x,y)} = e^{-0} = 1 = f(0, 0).$

#### AUFGABE 5

Sei die Kurve  $y(x) := \cosh(x)$ ,  $x \in [-1, 1]$  in kartesischen Koordinaten gegeben.

Berechnen Sie das Volumen des Körpers, der durch Rotation der Kurve um die x-Achse entsteht.

8 Punkte.

**Lösung:**  $V := \pi \int_{-1}^1 (y(x))^2 dx = \pi \int_{-1}^1 (\cosh(x))^2 dx = 2\pi \int_0^1 \frac{1}{4} (e^x + e^{-x})^2 dx = \frac{\pi}{2} \int_0^1 (e^{2x} + e^{-2x} + 2) dx = \frac{\pi}{2} (\frac{1}{2} e^{2x} - \frac{1}{2} e^{-2x} + 2x) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2} (\frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{2} e^{-2} + 2) = \frac{\pi}{2} (\sinh(2) + 2).$

#### AUFGABE 6

Berechnen Sie das folgende uneigentliche Integral:  $\int_1^\infty \arctan(x)/x^2 dx$ .

8 Punkte.

**Lösung:**  $\int_1^\infty \arctan(x)/x^2 dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \arctan(x)/x^2 dx$   
 $\int \arctan(x)/x^2 dx = -\frac{1}{x} \arctan(x) - \int (-\frac{1}{x}) \frac{1}{1+x^2} dx = (Partialbruchzerlegung) -\frac{1}{x} \arctan(x) + \int (-\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}) dx = -\frac{1}{x} \arctan(x) + \ln(|x|) - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$   
 $\int_1^b \arctan(x)/x^2 dx = -\frac{1}{b} \arctan b + \ln(\frac{b}{\sqrt{1+b^2}}) + \frac{\pi}{4} - \ln(1/\sqrt{2}).$   
 $\lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{b} \arctan b = 0. \lim_{b \rightarrow \infty} \ln(\frac{b}{\sqrt{1+b^2}}) = \lim_{b \rightarrow \infty} \ln(\frac{1}{\sqrt{1+1/b^2}}) = 0.$   
 $\implies \int_1^\infty \arctan(x)/x^2 dx = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln(2).$

#### AUFGABE 7

Integrieren Sie die folgende rationale Funktion:

$$r(x) := (3x^5 - 16x^4 + 25x^3 - 5x^2 - 6x - 5)/(x^3 - 6x^2 + 12x - 8)$$

*Hinweis:* Der Nenner hat eine ganzzahlige Nullstelle (Diese ist bekanntlich Teiler des konstanten Koeffizienten  $-8$ ).

12 Punkte.

**Lösung:** Da Zählergrad  $>$  Nennergrad, zunächst Polynomdivision mit Rest:

$$(3x^5 - 16x^4 + 25x^3 - 5x^2 - 6x - 5) = (3x^2 + 2x + 1)(x^3 - 6x^2 + 12x - 8) + x^2 - 2x + 3 \implies r = 3x^2 + 2x + 1 + s, \text{ mit } s := (x^2 - 2x + 3)/(x^3 - 6x^2 + 12x - 8).$$

Partialbruchzerlegung von  $s$ : Der Teiler 2 von  $-8$  ist Nullstelle von  $x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = (x-2)(x^2 - 4x + 4) = (x-2)^3$

$$\text{Ansatz: } s = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{C}{(x-2)^3} = (A(x-2)^2 + B(x-2) + C)/(x-2)^3 \stackrel{!}{=} (x^2 - 2x + 3)/(x-2)^3.$$

Koeffizientenvergleich der Zählerpolynome:

$$x^2: A = 1.$$

$$x: -4A + B = -2 \implies B = 2.$$

$$x^0: 4A - 2B + C = 3 \implies C = 3.$$

$$\implies \int \frac{1}{x-2} dx = \ln(|x-2|).$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int \frac{2}{(x-2)^2} dx &= -\frac{2}{x-2}. \\ \Rightarrow \int \frac{3}{(x-2)^3} dx &= -\frac{3}{2(x-2)^2}. \\ \Rightarrow \int r(x) dx &= x^3 + x^2 + x + \ln(|x-2|) - \frac{2}{x-2} - \frac{3}{2(x-2)^2} \end{aligned}$$

### AUFGABE 8

Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem

$$y''' + 9y'' + 27y' + 27y = 18 \sin(x) + 26 \cos(x) + 6e^{-3x}.$$

für die Anfangswerte  $y(0) := 0$ ,  $y'(0) := 0$ ,  $y''(0) := 0$ .

*Hinweis:* Das charakteristische Polynom hat eine ganzzahlige Nullstelle. 14 Punkte.

**Lösung:** Charakteristisches Polynom der homogenen DGL:  $P(\lambda) := \lambda^3 + 9\lambda^2 + 27\lambda + 27$ .  $P(-3) = 0$ . Also ist  $\lambda = -3$  eine Nullstelle von  $P(\lambda)$ ,  $P(\lambda) = (\lambda+3)(\lambda^2+6\lambda+9) = (\lambda+3)^3$ .

Da  $\lambda = -3$  eine dreifache Nullstelle von  $P(\lambda)$  ist, ist ein Fundamentalsystem der Lösungen der homogenen DGL:  $e^{-3x}, xe^{-3x}, x^2e^{-3x}$ .

Da die Inhomogenität  $6e^{-3x}$  selbst Lösung der homogenen DGL ist, lautet der Ansatz für eine partikuläre Lösung:  $y := Ax^3e^{-3x}$ .

$$y' = 3Ax^2e^{-3x} - 3Ax^3e^{-3x} = Ae^{-3x}(3x^2 - x^3).$$

$$y'' = -3Ae^{-3x}(3x^2 - x^3) + Ae^{-3x}(6x - 3x^2) = Ae^{-3x}(6x - 18x^2 + 9x^3).$$

$$y''' = -3Ae^{-3x}(6x - 18x^2 + 9x^3) + Ae^{-3x}(6 - 36x + 27x^2) = Ae^{-3x}(6 - 54x + 81x^2 - 27x^3).$$

Eingesetzt in die inhomogene DGL mit rechter Seite  $= 6e^{-3x}$  ergibt:

$$Ae^{-3x}(6 - 54x + 81x^2 - 27x^3) + 9(6x - 18x^2 + 9x^3) + 27(3x^2 - x^3) + 27 = Ae^{-3x} \times 6 \stackrel{!}{=} 6e^{-3x}. \Rightarrow A = 1.$$

Ansatz für partikuläre Lösung zur Inhomogenität  $18 \sin(x) + 26 \cos(x)$ :

$$y := B \sin(x) + C \cos(x).$$

$$y' = B \cos(x) - C \sin(x), \quad y'' = -B \sin(x) - C \cos(x), \quad y''' = -B \cos(x) + C \sin(x).$$

$$\text{Eingesetzt: } -B \cos(x) + C \sin(x) + 9(-B \sin(x) - C \cos(x)) + 27(B \cos(x)) - C \sin(x) + 27(B \sin(x) + C \cos(x)) \stackrel{!}{=} 18 \sin(x) + 26 \cos(x)$$

Koeffizientenvergleich:

$$\sin(x) : C - 9B - 27C + 27B = 18.$$

$$\cos(x) : -B - 9C + 27B + 27C = 26.$$

$$\Rightarrow B = 1, \quad C = 0.$$

Damit ergibt sich die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL zu:

$$y = C_1e^{-3x} + C_2xe^{-3x} + C_3x^2e^{-3x} + \sin(x) + x^3e^{-3x} = e^{-3x}(C_1 + C_2x + C_3x^2 + x^3) + \sin(x)$$

Anpassung an die Anfangsbedingungen:

$$y(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0.$$

$$y' = -3e^{-3x}(C_2x + C_3x^2 + x^3) + e^{-3x}(C_2 + 2C_3x + 3x^2) + \cos(x).$$

$$y'(0) := 0 \Rightarrow C_2 + 1 = 1. \Rightarrow C_2 = 0.$$

$$y' = e^{-3x}(-3C_3x^2 - 3x^3 + 2C_3x + 3x^2) + \cos(x). \quad y'' := 0 \Rightarrow C_3 = 0.$$

$$\Rightarrow y = x^3e^{-3x} + \sin(x) \text{ ist die Lösung des Anfangswertproblems.}$$

### AUFGABE 9

Bestimmen Sie alle stationären Punkte und deren Typ (d.h. ob ein lokales Minimum, Maximum oder ein Sattelpunkt vorliegt) der Funktion  $f(x, y) := xy(3 - x - y)$ . Hat die Funktion Extrema? 10 Punkte.

**Lösung:**  $f(x, y) = xy(3 - x - y) = 3xy - x^2y - xy^2$ .

$$\nabla f = (3y - 2xy - y^2, 3x - x^2 - 2xy)$$

$$\nabla f = (0, 0) \iff y(3 - 2x - y) = 0 \text{ und } x(3 - 2y - x) = 0$$

$$x = 0 : y = 0 \text{ oder } 3 - y = 0 \Rightarrow y = 3.$$

$$x \neq 0 : 3 - 2y - x = 0 \implies x = 3 - 2y.$$

$$y = 0 \implies x = 3 \text{ oder } y \neq 0 \implies 3 - 2x - y = 0 \implies 3 - 2(3 - 2y) - y = -3 + 3y = 0 \implies y = 1 \implies x = 1$$

Die stationären Punkte sind:  $P_1 := (0, 0)$ ,  $P_2 := (0, 3)$ ,  $P_3 := (3, 0)$ ,  $P_4 := (1, 1)$ .

$$\text{Hessematrix: } H(x, y) := \begin{pmatrix} -2y & 3 - 2x - 2y \\ 3 - 2x - 2y & -2x \end{pmatrix}$$

$$H(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \implies \det(H(0, 0)) = -9 < 0 \implies \text{Sattelpunkt}$$

$$H(0, 3) = \begin{pmatrix} -6 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \implies \det(H(0, 3)) = -9 < 0 \implies \text{Sattelpunkt}$$

$$H(3, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & -6 \end{pmatrix} \implies \det(H(3, 0)) = -9 < 0 \implies \text{Sattelpunkt}$$

$$H(1, 1) = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \implies -2 < 0 \text{ und } \det(H(1, 1)) = 3 > 0 \implies \text{lokales Maximum}$$

$$f(x, 1) = x(2 - x) \implies \lim_{x \rightarrow \infty} f(x, 1) = -\infty.$$

$$f(x, -1) = -x(4 - x) \implies \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x, -1) = \infty.$$

Folglich hat  $f(x, y)$  keine Extrema.

### AUFGABE 10

Berechnen Sie das Maximum der Funktion  $f(x, y, z) := xyz$  unter den Nebenbedingungen  $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$  und  $g(x, y, z) := xy + yz + zx = 2$ . Hat  $f$  ein Minimum? 10 Punkte.

**Lösung:** Ist  $x = 0$ , so ist  $f(0, y, z) = 0$  und wegen  $f(x, y, z) \geq 0$  für  $x, y, z \geq 0$  hat  $f$  auf dem Rand  $x = 0$  mit  $g(0, y, z) = yz = 2$  ein globales Minimum. Entsprechendes gilt für die Ränder  $y = 0$  und  $z = 0$ . Sei also nun  $xyz > 0$ :

$\nabla f = (yz, xz, xy)$  und  $\nabla g = (y + z, x + z, x + y)$ . Da  $xyz > 0 \implies \nabla g \neq 0$ . Folglich ist notwendige Bedingung für ein Maximum unter der Nebenbedingung:  $\nabla f = \lambda \nabla g \implies yz = \lambda(y + z), xz = \lambda(x + z), xy = \lambda(x + y). x, y, z > 0 \implies yz, y + z > 0 \implies \lambda > 0$ .

Division der beiden ersten Gleichungen liefert:

$$\frac{yz}{xz} = \frac{y+z}{x+z} \implies \frac{y}{x} = \frac{y+z}{x+z} \implies xy + yz = xy + yz \implies x = y. \text{ Entsprechend: } z = y.$$

Eingesetzt in die Nebenbedingung:  $g(x, x, x) = 3x^2 = 2 \implies x = \sqrt{\frac{2}{3}}$ , weil  $x > 0 \implies$

$f(\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}) = (\frac{2}{3})^{\frac{3}{2}}$ . Dies ist das eindeutig bestimmte Maximum von  $f$  unter den Nebenbedingungen.